

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN34A : Optimización
Profesores: Natalia Yanković - Guillermo Durán
Patricio Conca - Patricia Zimmerman
Auxiliares: Alejandro Cataldo - Giovanni Medina
Francisco González - Sebastián Souyris

Control #2

DURACIÓN: 3 HORAS.

Pregunta 1

Ricardo Ramírez, distinguido alumno de *ingeniería*, debe decidir cómo distribuir los $\$I$ que recibe semanalmente de sus generosos padres.

Para facilitar la decisión ha dividido todos los bienes y servicios que puede adquirir en dos categorías: los *básicos* y los *suntuarios*. Ricardo ha determinado que, en promedio, el precio unitario de un bien *básico* es $\$P_b$, mientras que el precio unitario de un bien *suntuario* es de $\$P_s$.

Existe una cantidad mínima de unidades de bienes *básicos* (relacionados con locomoción, alimentación, fotocopias, etc.) igual a M_b que deben ser consumidos cada semana. Por otra parte, la cantidad de dinero que invierta en productos *suntuarios* no puede ser superior a tres veces la invertida en productos *básicos*.

Además, Ricardo sabe que para disfrutar de los productos *suntuarios* necesita de T_s minutos por unidad adquirida, y sólo dispone de H horas libres a la semana.

Considere que los bienes no se pueden inventariar, y que Ricardo recibe un beneficio igual a f_s por unidad de bien *suntuario* adquirida y un beneficio de f_b por cada unidad **por sobre el mínimo** de bienes *básicos* consumidos.

1. (1,0 pts) Formule un modelo de PL continua que permita a Ricardo decidir cuánto dinero invertir en bienes *básicos* y *suntuarios* en una semana.

En lo que sigue considere los siguientes valores para los parámetros:

I	=	$\$60.000$
P_b	=	$\$500$
P_s	=	$\$1.200$
T_s	=	90 minutos
H	=	15 horas
M_b	=	20 unidades
f_b	=	1.000
f_s	=	3.000

2. (1,0 ptos) Dibuje el espacio de soluciones factibles. Encuentre gráficamente la solución óptima de este problema.
3. (2,0 ptos) ¿Qué ocurre con la solución óptima (restricciones activas/inactivas) si ahora Ricardo dispone de todo el día para consumir los bienes *suntuarios*? (suponga que no gasta tiempo en consumir los bienes *básicos*). ¿Cuánto es el valor mínimo de f_s para que Ricardo siga consumiendo bienes *suntuarios*? ¿Es posible que exista alguna función objetivo que permita que en este modelo alguna semana a Ricardo quede alguna fracción del dinero que le entregan sus padres?.

Suponga ahora que nuestro estudiante puede conseguir un trabajo part time en sus horas libres de manera de obtener un ingreso de \$ 4.000 por hora.

4. (2,0 ptos) Reformule el problema de optimización para esta nueva situación, considerando los valores numéricos de los parámetros, escribiéndolo en forma estándar. Explique en que consiste el método SIMPLEX Fase I y cómo se podría utilizar en este caso particular. Encuentre una solución básica factible (escriba explícitamente la base y el valor de las variables involucradas) y explique cómo se podría determinar si es o no un óptimo del problema.

Pauta Pregunta 1

1. (1,0 ptos)

Definición de Variables:

- $X_b \equiv$ Cantidad de dinero gastada en bienes *básicos* en una semana
- $X_s \equiv$ Cantidad de dinero gastada en bienes *suntuarios* en una semana

Función Objetivo:

$$\max \left\{ \left(\frac{X_b}{P_b} - M_b \right) \cdot f_b + \frac{X_s}{P_s} \cdot f_s \right\}$$

Restricciones:

$$X_b + X_s \leq I \quad (1)$$

$$\frac{1}{3} \cdot X_b \geq X_s \quad (2)$$

$$\frac{X_b}{P_b} \geq M_b \quad (3)$$

$$\frac{X_s}{P_s} \cdot T_s \leq H \cdot 60 \quad (4)$$

$$X_s, X_b \geq 0 \quad (5)$$

Donde la restricción (1) corresponde a la restricción presupuestaria, la segunda a no gastar en productos *suntuarios* más de tres veces lo que se gasta en *básicos*, la restricción (3) obliga a consumir el mínimo de unidades en productos *básicos*, la restricción (4) asegura que tendremos el tiempo suficiente para consumir todos los productos *suntuarios* que se adquieran en una semana, y por último la restricción (5) asegura la no negatividad de las variables de decisión.

2. (1,0 ptos) El espacio de soluciones factibles, junto con la solución óptima del problema se muestran en la siguiente figura.

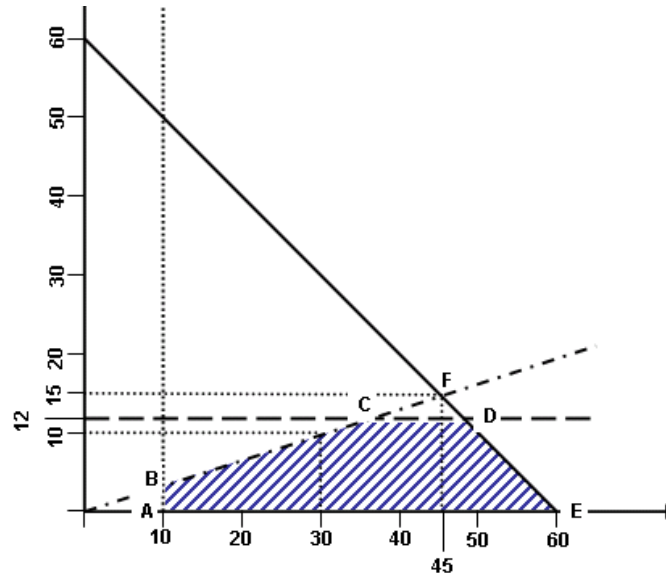


Figura 1

3. (2,0 ptos)
- Si Ricardo dispone de todo el día para consumir productos *suntuarios* la restricción (4) se desplaza horizontalmente hacia arriba, por lo que el punto óptimo cambia pasando a ser $X_b = 45,000$, $X_s = 15,000$. En este caso la restricción presupuestaria continúa siendo activa y la restricción (2) pasa de ser inactiva a ser activa.
 - Para que Ricardo siga consumiendo bienes *suntuarios* Ceteris Paribus (todo el resto constante) f_s debe ser mayor o igual que 2, el coeficiente de cada peso gastado en bienes *básicos* en la función objetivo. En el caso que $f_s = 2$ se tendrá que todos los puntos contenidos en el segmento DE serán óptimos, incluido el E donde $X_s = 0$, pero si $f_s > 2$ el óptimo será único (el punto E) y Ricardo invertirá todo su dinero en bienes de tipo *básico*.
 - Si Ricardo valora en CERO el dinero gastado en bienes *básicos* la función objetivo será una recta paralela al eje de X_b . De esta manera ya no tendremos un único punto óptimo, sino que se podrá elegir cualquier punto perteneciente al segmento CD del dibujo, de manera que es posible que la restricción presupuestaria no sea activa en el óptimo, y a Ricardo le sobre dinero.

4. (2,0 ptos)

Si consideramos X_t como el número de horas trabajadas en una semana se tendrá:

Función Objetivo:

$$\min \left\{ -2 \cdot X_b - \frac{5}{2} \cdot X_s + 10,000 \right\}$$

Restricciones:

$$X_b + X_s - 4,000 \cdot X_t + h_1 = 60,000 \quad (6)$$

$$\frac{1}{3} \cdot X_b - X_s + h_2 = 0 \quad (7)$$

$$X_b - h_3 = 10,000 \quad (8)$$

$$\frac{3}{40} \cdot X_s + 60 \cdot X_t + h_4 = 900 \quad (9)$$

$$X_s, X_b, X_t \geq 0 \quad (10)$$

Fase I consiste en crear un problema artificial incorporando variables de manera de tener una base inicial factible trivial para este nuevo modelo. La función objetivo de este problema artificial es tal que aseguramos que en el óptimo las variables artificiales no pertenecerán a la base, de manera que el resultado básico óptimo será básico factible en el problema original.

Para encontrar una base inicial factible sólo debemos notar que la solución óptima que teníamos antes de introducir la modificación todavía es factible, puesto que basta considerar que las horas trabajadas son igual a cero para satisfacer todas las restricciones del nuevo problema.

Así una base inicial factible estará compuesta por las columnas de las variables X_b y X_s y por 2 columnas asociadas a variables de holgas de restricciones inactivas en el punto en cuestión.

$$\begin{bmatrix} X_b \\ X_s \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48,000 \\ 12,000 \\ 4,000 \\ 38,000 \end{bmatrix} \quad \text{Con la base asociada} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{3}{40} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pregunta 2 y Pauta

1. (70 %) Sea el siguiente problema lineal en forma estándar:

$$\text{mín } z = c^T \vec{x}$$

s.a.

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= \vec{b} \\ \vec{x} &\geq 0 \end{aligned}$$

Donde: $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ con $n \geq m$; $rg(A) = m$; $b \in \mathbb{R}^m$; c y $x \in \mathbb{R}^n$, y sea B una base primal factible.

- a) ¿Cómo determina el algoritmo SIMPLEX si el vértice actual es una solución óptima del problema?

RESPUESTA: Un vértice será óptimo si todos los costos reducidos no básicos son mayores o iguales a 0. Para el problema planteado quiere decir que $c_j \geq 0$ para todo j no básico, donde $\bar{c}_j = c_j - c_B B^{-1} R_{\bullet j}$ y R es tal que $A = [B|R]$.

- b) Si el vértice actual es óptimo, ¿cómo se puede determinar a través del algoritmo si hay más de un óptimo?

RESPUESTA: Si en el óptimo existe al menos una variable no básica con $\bar{c}_k = 0$, entonces el problema admite óptimos alternativos.

- c) ¿Cómo determina el algoritmo SIMPLEX si el problema es no acotado?

RESPUESTA: El problema es no acotado si $a_{\bullet s}^- \leq 0$, donde $a_{\bullet s}^- = B^{-1}R_{\bullet s}$, con $R_{\bullet s}$ la columna de R (tal que $A = [B|R]$) que entra a la base en la iteración.

- d) ¿Cuándo se dice que una solución básica es degenerada?

RESPUESTA: Una solución básica es degenerada cuando existe al menos una variable básica, x_s , igual a 0.

- e) Dar una cota superior (en función de n y m) para el número de soluciones básicas factibles distintas que pueden ser degeneradas? Justificar.

RESPUESTA: La cota superior del número de soluciones básicas factibles distintas es la forma de escoger m columnas de entre las n posibles de la matriz, esto corresponde a

$$\binom{n}{m}.$$

- f) ¿Cómo se hace para obtener una solución básica factible inicial si la matriz B no está dada?

RESPUESTA: Se estudia el problema de **Fase I**. Este problema se muestra a continuación:

$$\text{mín } w = \sum_{i=1}^m t_i$$

s.a.

$$\begin{aligned} A\vec{x} + I\vec{t} &= \vec{b} \\ \vec{x} &\geq 0 \end{aligned}$$

Luego, el problema original tiene solución, si y sólo si el valor óptimo de este nuevo problema es 0. La matriz B asociada al punto óptimo en este nuevo problema es la matriz primal factible inicial del problema original.

2. (30 %) Sea el siguiente problema:

$$\text{mín } z = c^T \vec{x}$$

s.a.

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= \vec{b} \quad \text{donde } b_j \leq 0 \quad \forall j \in \mathcal{J} \\ x_i &\leq 0 \quad \forall i \in \mathcal{I} \end{aligned}$$

Modifique el criterio de optimalidad, de selección de la variable que ingresa a la base y de selección de la variable que deja la base, de tal manera que el algoritmo simplex se pueda aplicar directamente a un problema con variable no positiva.

Pregunta 3

Nuestro amigo, Don Giuseppe Mandinga ha decidido utilizar su conocimiento de modelación lineal para confeccionarse una pseudo asignación del tiempo que resta del año, el cual es TA .

Dentro de las actividades prioritarias en esta asignación se encuentran: asistir a los I Happy Hours que restan en el año, cada uno de los cuales tiene una duración máxima de TH_i , dedicarle tiempo a la conquista de su amor recién descubierto, y mantener su preocupación por evitar que sus alumnos despierten al lado oscuro. El resto de su tiempo lo dedica a sus actividades cotidianas.

Él tiene la posibilidad de cantar en cada uno de los Happy Hours, y como su afición por el canto es grande, ha decidido que a lo más en dos de los Happy Hours será él el único cantante, y por lo tanto, cantará toda la duración del Happy Hours en cuestión.

Para su conquista amorosa ha llevado a cabo una encuesta entre sus amigos y ha concluido que ninguno de ellos tiene idea alguna de como entender a las mujeres, pero de todas formas ha logrado rescatar la siguiente respuesta reiterativa de ellos: *para conquistarla debes hacer que cada cita dure más que el total de tiempo ya dedicado a las citas anteriores, con excepción de la última cita, la cual debe ser la de menor duración de todas*. Dada esta información, Giuseppe ha decidido que debe planificar el tiempo de duración de cada una de las J citas que espera tener con su enamorada.

Además, Giuseppe luchará por evitar que sus M alumnos se vayan al lado oscuro. Para ello, él estima que cada unidad de tiempo dedicada logra que CB alumnos no tomen este camino.

Por último, Giuseppe ha pensado mucho sobre la forma de priorizar entre una y otra actividad, y ha llegado a la conclusión de que todo lo puede transformar en unidad de gozo, [u.g]. Es así como ha definido que el lograr el amor le entregará BA [u.g] por cada unidad de diferencia entre el tiempo destinado a la última cita y el tiempo de la cita de menor duración de entre todas las restantes. El canto en los Happy Hours le otorga BC_i [u.g] por unidad de tiempo cantada en el Happy Hours i , y obtiene un beneficio de $BSLO$ por cada alumno que logra que no opte por el camino oscuro.

La idea de Giuseppe es construir un modelo de programación lineal continua que le permita maximizar sus unidades de gozo durante lo que resta de año.

Nota: Preocúpese solamente de asignar el tiempo disponible en el año y no de la secuencia que deberían seguir las distintas actividades.

Pauta Pregunta 3

- Variables:

TC_i : tiempo dedicado a cantar en el Happy Hours i .

TA_j : tiempo dedicado a la cita j .

TS : tiempo dedicado a salvar alumnos.

η : mínimo tiempo de entre las citas, con la excepción de la última.

- Restricciones:

1. No estar en un Happy Hours más del tiempo de duración de éste. **(0.5 punto)**

$$TC_i \leq TH_i \quad \forall i \in \mathcal{I}.$$

2. Evitar que cante en más de dos Happy Hours toda la duración de estos. **(0.5 punto)**

$$TC_i + TC_q + TC_w < TH_i + TH_q + TH_w \quad \forall i, q, w \in \mathcal{I}, \text{ tal que } i \neq q \neq w.$$

3. No salvar a más alumnos que M . **(0.5 punto)**

$$CB \cdot TS \leq M$$

4. No destinar más tiempo que el TA restante del año. **(0.5 punto)**

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} TC_i + \sum_{j \in \mathcal{J}} TA_j + TS \leq TA$$

5. Hacer que el tiempo de la cita j sea mayor que la suma del tiempo empleado en todas las citas antes de la j . **(1.0 punto)**

$$\sum_{m=1}^{j-1} TA_m \leq TA_j \quad \forall j \in \mathcal{J}, \text{ tal que } j \neq J.$$

6. Hacer que la última cita dure menos que todo el resto. **(0.5 punto)**

$$TA_J \leq TA_j \quad \forall j \in \mathcal{J}, \text{ tal que } j \neq J.$$

7. Encontrar el valor de η . **(1.0 punto)**

$$\eta \leq TA_j \quad \forall j \in \mathcal{J}, \text{ tal que } j \neq J.$$

8. Naturaleza de las variables. **(0.5 punto)**

$$TC_i \geq 0 \quad \forall i \in \mathcal{I}.$$

$$TA_j \geq 0 \quad \forall j \in \mathcal{J}.$$

$$TS, \eta \geq 0$$

- Función Objetivo. **(1.0 punto)**

$$\text{máx } GOZO = \left\{ \sum_{i \in \mathcal{I}} (BC_i \cdot TC_i) \right\} + \{BSLO \cdot (CB \cdot TS)\} + \{BA \cdot (\eta - TA_J)\}$$

Además, es posible responder al mismo problema sin necesidad de definir la variable η , esto debido a las condiciones del problema. Dada la restricción (5) es posible darse cuenta inmediatamente que la variable TA_1 será la de menor duración de entre todas las citas, con excepción de la última (J). Con esto, es posible reemplazar en las restricciones η por TA_1 , con lo cual se obtiene una formulación diferente del problema, pero que entregará la misma solución.